Quaternionen über Polynomringen, quadratischen Formen über R[x,y] und Vektorbündel über P^2(C)

Knus, Max-Albert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 33, 1982, S.165-168

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Quaternionen über Polynomringen, quadratischen Formen über $\mathbb{R}[x,y]$ und Vektorbündel über $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

Von **Max-Albert Knus**, Zürich

Einführung

Es sei $A = K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynomring in mindestens 2 Variablen über einem Körper K. Nach einem tiefliegenden Satz von Quillen [13] und Suslin sind endlich erzeugte projektive A-Moduln immer frei. Ersetzt man K durch einen Schiefkörper D, so gilt der Satz nicht mehr. Für jeden nicht kommutativen Schiefkörper D gibt es projektive $D[X_1, \ldots, X_n]$-Moduln, welche nicht frei sind [9]. Diese Moduln sind alle Ideale, d.h. sie haben Rang eins. Es gelang Stafford 1980 zu zeigen, daß projektive Moduln vom Rang größer als eins über $D[X_1, \ldots, X_n]$ frei sind [14].

In diesem Übersichtsvortrag werden Beispiele von nicht freien projektiven Idealen in $\mathbb{H}[x,y]$ konstruiert, wobei $\mathbb{H}$ die reellen Quaternionen bezeichnet. Dann zeigen wir, daß die projektiven Ideale von $\mathbb{H}[x,y]$ eng mit positiv-definiten quadratischen Formen über $\mathbb{R}[x,y]$ zusammenhängen. Im letzten Teil wird eine Klassifikation eines Teiles dieser Ideale gegeben. Dabei werden Resultate von Barth [1] über stabile Vektorbündel über $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ benützt.

1. Konstruktion von projektiven Idealen von $\mathbb{H}[x,y]$ ([9])

Wir bezeichnen den Polynomring $\mathbb{H}[x,y] = \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x,y]$ mit H. Alle H-Moduln werden Linksmoduln sein. Sei $\alpha : H^2 \to H$ die H-lineare Abbildung, definiert durch $\alpha((1,0)) = x+i$ und $\alpha((0,1)) = y+j$, wobei i und j die üblichen Erzeugenden von $\mathbb{H}$ sind. Da $-(y+j)(x+i) + (x+i)(y+j) = 2ij$ eine Einheit von H ist, ist die Abbildung α surjektiv. Weiter zeigt man leicht, daß α einen Schnitt besitzt. Folglich ist der Kern K von α projektiv. Durch Projektion auf den ersten Summanden von H^2 wird K mit einem Ideal $P_{x,y}$ von H identifiziert. Die zwei Elemente $(y+j)(x-i)$ und y^2+1 erzeugen $P_{x,y}$ als Ideal, und eine einfache Gradbetrachtung zeigt, daß $P_{x,y}$ nicht frei sein kann. Weitere Beispiele von projektiven Idealen erhält man durch Ersetzen von x und y in der Definition von $P_{x,y}$ durch beliebige Polynome f und g aus $\mathbb{R}[x,y]$. Sei $P_{f,g}$ das zugehörige Ideal. Dann stellt sich die Aufgabe, die Isomorphieklassen der Ideale $P_{f,g}$ zu untersuchen. Das erste Resultat in dieser Richtung wurde von R. Parimala und R. Sridharan [11] bewiesen: die Ideale P_{x,y^n} sind für verschiedene Werte von n (n eine ganze natürliche Zahl) untereinander nicht isomorph. Ihr Beweis war sehr kompliziert. Ein anderer Beweis folgt aus den Methoden, welche im dritten Teil dieser Arbeit beschrieben werden.

2. Quadratische Formen über $\mathbb{R}[x,y]$

Die reduzierte Norm von $\mathbb{H}$ definiert durch Skalarerweiterung eine reguläre quadratische Form auf H. In [5] wurde eine reduzierte Norm mit funktoriellen Eigenschaften für Moduln über Azumaya-Algebren eingeführt. Für ein projektives Ideal P in $H = \mathbb{H}[x,y]$ gibt diese reduzierte Norm eine reguläre quadratische Form vom Rang 4 über $\mathbb{R}[x,y]$. Falls das Ideal nicht frei ist, ist die Form unzerlegbar (als orthogonale Summe) über $\mathbb{R}[x,y]$, also insbesondere nicht diagonalisierbar. Zwei projektive Ideale sind genau dann isomorph, wenn die entsprechenden Formen isometrisch sind.

Durch die Wahl einer Basis des Ideals als $\mathbb{R}[x,y]$-Modul wird die reduzierte Norm durch eine symmetrische 4×4-Matrix mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}[x,y]$ und Determinante eine positive reelle Zahl dargestellt. Diese Matrix ist positiv-definit, d.h. jedes Einsetzen von reellen Werten $x \mapsto \xi$, $y \mapsto \eta$ gibt eine positiv-definierte Form über $\mathbb{R}$. In [6] wurde gezeigt, daß die reduzierte Norm vom Ideal $P_{f,g}$ durch die symmetrische Matrix

$$Q_{f,g}: \begin{pmatrix} 4+g^2(1+f^2) & fg(1+g^2) & 0 & g(1+f^2g^2) \\ & 1+f^2g^4 & -g(1+f^2g^2) & 0 \\ & & 4+g^2(1+f^2) & fg(1+g^2) \\ & & & 1+f^2g^4 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Diese Matrix war für $f = x$ und $g = y$ das erste explizite Beispiel einer regulären quadratischen Form über einem Polynomring, welche nicht diagonalisierbar ist [10].

Jede positiv-definite reguläre quadratische Form über $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ läßt sich als orthogonale Summe von unzerlegbaren Formen darstellen. Eine natürliche Frage ist, ob eine Eindeutigkeit der Zerlegung nach Krull-Schmidt gilt. Bis jetzt konnte erst der Fall von 2 Variablen behandelt werden [4]. Dabei wurden Methoden benützt, die im nächsten Teil beschrieben werden. Eine weitere Frage ist die Existenz von unzerlegbaren Formen in allen Dimensionen. Formen vom Rang $\leqq 2$ sind immer zerlegbar [10]. Unzerlegbare Formen vom Rang 3 und 4 wurden in [5] klassifiziert. Beispiele von unzerlegbaren Formen vom Rang > 4 wurden erst kürzlich konstruiert: Beispiele vom Rang 6 in [4] und vom Rang 4n für alle n in [8].

3. Ideale und Formen auf der projektiven Ebene

Ein projektives Ideal in $\mathbb{H}[x,y]$ kann geometrisch interpretiert werden als ein reelles Vektorbündel vom Rang 4 mit einer quaternionalen Struktur über der reellen affinen Ebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Wir denken uns die affine Ebene in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ eingebettet. Knebusch stellte die Frage, ob quadratische Bündel über $\mathbb{A}^2$ sich auf $\mathbb{P}^2$ erweitern lassen. In [7] wurde gezeigt, daß jedes anisotrope quadratische Bündel über $\mathbb{A}^2(K)$ eine eindeutige Erweiterung auf $\mathbb{P}^2(K)$ besitzt für beliebige Körper K der Charakteristik nicht 2. Eine Anwendung dieses Resultates ist der Satz von Krull-Schmidt für positiv-definite Formen über $\mathbb{R}[x,y]$: Aus [12] folgt, daß der Satz von Krull-Schmidt für quadratische Bündel über $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ gilt [4]. Also gilt er auch für $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

Eine entsprechende Erweiterung von $\mathbb{A}^2$ auf $\mathbb{P}^2$ ist auch für Ideale in $\mathbb{H}[x,y]$ möglich, wobei jedoch die Eindeutigkeit der Erweiterung auf $\mathbb{P}^2$ nur bis auf ein Tensorprodukt mit einem Linienbündel $0(n)$ von $\mathbb{P}^2$ gewährleistet wird [7].

Durch die Einbettung $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ induziert jede quaternionale Struktur eine komplexe Struktur, und ein „quaternionales" Bündel, welches die Erweiterung eines Ideals in $\mathbb{H}[x,y]$ ist, kann als komplexes Vektorbündel vom Rang 2 über $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ betrachtet werden. Komplexe Bündel vom Rang 2 über $\mathbb{P}^c(\mathbb{C})$ werden topologisch durch ihre zwei ersten Chern-Klassen c_1 und c_2 klassifiziert. Für jedes projektive Ideal P in $\mathbb{H}[x,y]$ gibt es eine (bis auf Isomorphie) eindeutige Erweiterung $\underline{E}(P)$ auf $\mathbb{P}^2$ mit $c_1 = 0$ ([3] oder [7]). Für dieses „normierte" Bündel ist dann c_2 automatisch eine gerade Zahl [7]. Insbesondere kann man zeigen [3], daß $c_2(\underline{E}(P_{f,g})) = 2 \cdot [\mathbb{C}(x,y):\mathbb{C}(f,g)]$, falls $f(x,y)$ und $g(x,y)$ keine gemeinsame Nullstelle auf der ∞-Geraden von $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ haben. Da $c_2(\underline{E}_{x,y^n}) = 2n$ ist, folgt, daß die Moduln P_{x,y^n} und P_{x,y^m} resp. Q_{x,y^n} und Q_{x,y^m} nicht isomorph sind für $n \neq m$.

In [6] wird auch bewiesen, daß die Bündel $\underline{E}(P)$ stabile Bündel sind. Die Klassifikation von stabilen 2-Bündeln auf $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ mit $c_1 = 0$ und $c_2 = 2$, die von Barth gegeben wurde [1], hat dann Anwendungen auf Ideale von $\mathbb{H}[x,y]$. Es gilt insbesondere die folgende Klassifikation [7]:

Satz. Jedes Ideal P von $\mathbb{H}[x,y]$ mit $c_2(\underline{E}(P)) = 2$ ist isomorph zu einem Ideal $P_{f,g}$ (siehe § 2) mit

$$(*) \quad \begin{matrix} f = a_1x + a_2y + a_3 \\ g = b_1x + b_2y + b_3 \end{matrix} \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Weiter ist $P_{f,g}$ isomorph zu $P_{x,y}$ genau dann, wenn die affine Abbildung (*) orthogonal ist.

Also werden die projektiven Ideale von $\mathbb{H}[x,y]$ mit $c_1 = 0$ und $c_2 = 2$ durch den Restklassenraum $GA(\mathbb{R}^2)/O(\mathbb{R}^2)$ klassifiziert, wobei GA die affine Gruppe und O die orthogonale Gruppe ist. Entsprechende Resultate gelten für die zugehörigen quadratischen Formen $Q_{f,g}$.

Eine weitere Anwendung der Theorie der stabilen Bündel ist die im zweiten Teil erwähnte Konstruktion [8] von unzerlegbaren quadratischen Formen vom Rang 4n über $\mathbb{R}[x,y]$. Dabei werden unzerlegbare komplexe Bündel benützt, welche von Hulek stammen [2].

Literatur

[1] W. Barth, Moduli of vector bundles on the projective plane, Inventiones Math. 42 (1977), 63–91.

[2] K. Hulek, On the classification of stable rank-r vector bundles over the projective plane, Proceedings, Vector Bundles and Differential equations, Nice, 1979, Birkhäuser Verlag = Progress in Mathematics 7.

[3] M.-A. Knus, Quaternionic modules over $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, Proceedings, Brauer groups and applications, Antwerpen 1981, Springer Lecture Notes.

[4] M.-A. Knus, M. Ojanguren and R. Parimala, Positive definite quadratic bundles over the projective plane, Preprint, 1981.

[5] M.-A. Knus, M. Ojanguren and R. Sridharan, Quadratic forms and Azumaya algebras, J. Reine Angew. Math. 303/304 (1978), 231–248.

[6] M.-A. Knus and R. Parimala, Quadratic forms associated with projective modules over quaternion algebras, J. Reine Angew. Math. 318 (1980), 20–31.

[7] M.-A. Knus, R. Parimala und R. Sridharan, Non-free projective modules over $\mathbb{H}[x,y]$ and stable bundles over $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, Inventiones Math. 65 (1981), 13–27.

[8] M. Ojanguren, R. Parimala and R. Sridharan, Indecomposable quadratic bundles of rank 4n over the real affine plane, Preprint, 1981.

[9] M. Ojanguren and R. Sridharan, Cancellation of Azumaya algebras, J. Algebra 18 (1971), 501–505.

[10] R. Parimala, Failure of a quadratic analogue of Serie's conjecture, Amer. J. Math. 100 (1978), 913–924.

[11] R. Parimala and R. Sridharan, Projective modules over polynomial rings over division rings, J. Math. Kyoto Univ. 15 (1975), 129–148.

[12] H.G. Quebemann, W. Scharlau and M. Schulte, Quadratic and Hermitian forms in additive and abelian categories, J. Algebra 59 (1979), 264–289.

[13] D. Quillen, Projective modules over polynomial rings, Inventiones Math. 36 (1976), 167–171.

[14] J.T. Stafford, Projective modules of polynomial extensions of division rings, Inventiones Math. 59 (1980), 105–117.